ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

SECONDA PROVA SCRITTA - ESEMPIO

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15 – SCIENTIFICO – SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Fissati due parametri reali $S > 0, k > 0$, considera la funzione:

$$f_k(x) = \frac{S}{1 + e^{-kx}}$$

il cui grafico viene indicato con Γ_k.

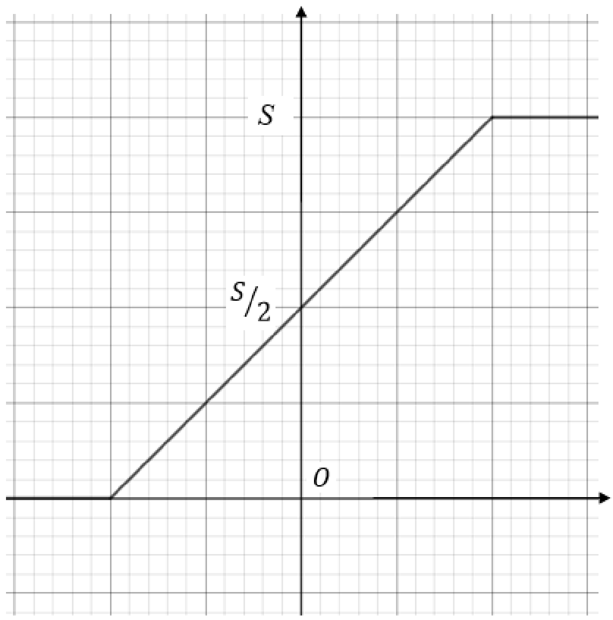
La funzione $f_k(x)$ può essere adoperata per studiare la possibile evoluzione nel tempo di una popolazione che abbia capacità di riprodursi, nell'ipotesi in cui la limitatezza delle risorse disponibili causi l'esistenza di una "soglia di sostenibilità" al di sotto della quale la popolazione è costretta a mantenersi.

1. Dimostra che i valori assunti dalla funzione $f_k(x)$ si mantengono all'interno dell'intervallo aperto delimitato inferiormente dal valore 0 e superiormente dal valore *S*, dove quest'ultimo rappresenta tale soglia di sostenibilità.

2. Osservando Γ_k, individua la trasformazione geometrica da applicare a Γ_k per farlo diventare il grafico di una funzione dispari, e determina l'espressione analitica di tale funzione.

3. Individua graficamente o analiticamente il valore della *x* corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione $f_k(x)$; determina quindi, in funzione dei parametri *S* e *k*, il valore di tale velocità massima.

Dovendo effettuare lo studio di una coltura batterica in un ambiente a risorse limitate, puoi pensare, al fine di semplificare i calcoli, di approssimare la funzione $f_k(x)$ con una funzione come $g_k(x)$, il cui grafico è riportato nella figura seguente:



Il valore di $g_k(x)$ passa da 0 a S con una rampa lineare, di pendenza pari alla pendenza di Γ_k nel punto di ascissa 0.

4. Determina, in funzione dei parametri S e k, l'espressione analitica della funzione $g_k(x)$.

5. Illustra il procedimento che adotteresti per valutare la accettabilità dell'approssimazione di $f_k(x)$ fornita da $g_k(x)$.

6. All'aumentare di k, tale approssimazione diventa migliore? Motiva la tua risposta.

PROBLEMA 2

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE EXPRESS sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di parallelepipedo a base quadrata, di volume 10 dm^3, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Determina il valore del lato b della base quadrata che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, tenendo presente la necessità che il volume sia 10 dm^3.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente, e inizia a fondere se lungo il percorso raggiunge la temperatura di 0°C.

2. Scegli, motivando la tua scelta, quale delle seguenti funzioni è più idonea per rappresentare il processo di riscaldamento prima dell'inizio della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura del ghiaccio all'istante $t = 0$, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t è il tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = \left(T_a - T_g\right)e^{-Kt}$$

$$T(t) = \left(T_a - T_g\right).\left(1 - e^{-Kt}\right) + T_g$$

$$T(t) = \left(T_a - T_g\right)e^{Kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

3. Poiché il parametro K varia in funzione di diversi fattori produttivi, c'è un'incertezza del 10% sul suo effettivo valore. Ritieni che questo determini una incertezza del 10% anche sul valore della temperatura T del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero? Motiva la tua risposta, in modo qualitativo o quantitativo.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente cilindrico, con raggio della base eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm.

4. Sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.